UNIVERSIDAD DE ANDALUCÍA
Curso 2009-2010
MATEMÁTICAS II
OPCIÓN B

1º Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{sen(x)}}{x^2}$

Aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{senx}\cdot \cos x}{2x} = \frac{0}{0}$$

Otra vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{senx} \cos x^2 + e^{senx}\, sen(x)}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

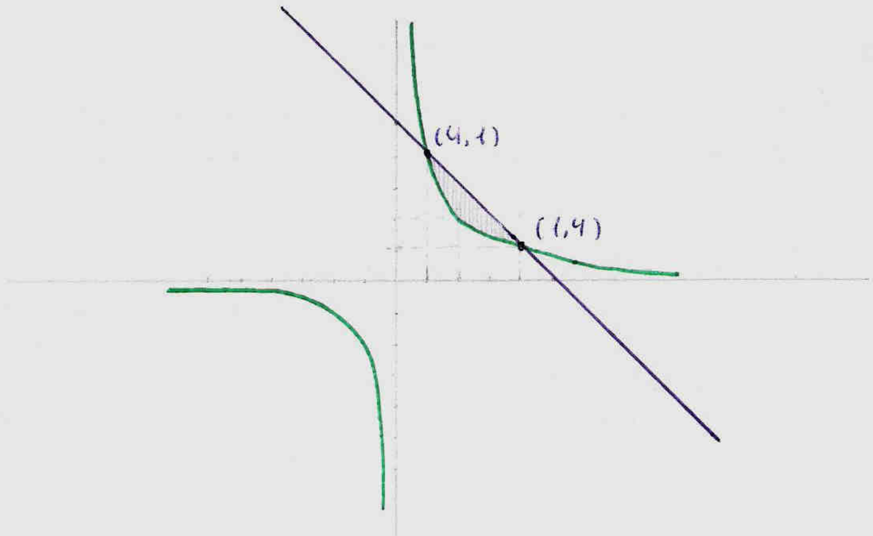
2º $f(x) = 5 - x$ $\qquad g(x) = \dfrac{4}{x}$

Para $f(x)$:

x	0	5
y	5	0

Para $g(x) \Rightarrow$

x	1	4	2
y	4	1	2



Se cortan en: $5 - x = \dfrac{4}{x} \Rightarrow 5x - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$

$y = 5 - 4 = 1$, $y = 5 - 1 = 4$

Puntos de corte $(4,1)$ y $(1,4)$

b) Calcular el área: Calculamos la función diferencia y hallamos la primitiva. Como límites de integración 1 y 4 (de los puntos de corte:

$p(x) = 5 - x - \dfrac{4}{x} \Rightarrow \displaystyle\int_1^4 p(x) = \left. 5x - \frac{x^2}{2} - 4\cdot \log x \right]_1^4$

$= 5(4) - \dfrac{16}{2} - 4\cdot\log 4 - 5(1) + \dfrac{1^2}{2} + 4\log(1) = \dfrac{15}{4} - 4\log 4$

Area $\simeq 1{,}9548\ u^2$ //

3°

a) Tomamos la matriz de coeficientes (A) y la ampliada (AC) y comparamos sus rangos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda+2 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2F_1 - F_2 \\ \sim \\ \lambda F_1 - F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & -1 & 2\lambda-1 & 2\lambda-2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & -1 & 2\lambda-1 & 2\lambda-2 \\ 0 & -(\lambda+1) & (\lambda+1)(\lambda-1) & \lambda^2-\lambda-2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Para $\lambda = -1$, El Rango de A $= Rg(AC) = 2$ Por lo que tiene soluciones infinitas (compatible indeterminado)

Para $\mathbb{R} - \{-1\}$, el sistema es compatible determinado

b) Lo resolvemos para $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ -y - 3z = -4 \end{array}$$

Tomamos $z = t \Rightarrow$ 1^a $x - y - t = -1$

2^a $-y - 3t = -4 \Rightarrow -y = -4 + 3t$

$y = 4 - 3t$

1^a: $x - (4 - 3t) - t = -1$

$x - 4 + 3t - t = -1$

$x = 3 - 2t$

$\Rightarrow$ sol. paramétrica: $\begin{array}{l} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = t \end{array}$

Es solución cualquier punto de la recta que pasa por el $(3, 4, 0)$ y tiene vector dirección $(-2, -3, 1)$

4º La recta r en forma vectorial quedaría,

tomando $x = \lambda$. $4\lambda + 3z = 33 \Rightarrow 3z = 33 - 4\lambda$
$\Rightarrow z = 11 - \frac{4}{3}\lambda$ $\Rightarrow$ Ec. vectorial $(x, y, z) = (\lambda, 0, 11 - \frac{4}{3}\lambda)$

Tomamos un vector director $\vec{v} = (1, 0, -4/3)$

S genérico sería $S(x, y, z) = S(\lambda, 0, 11 - 4/3\lambda)$

Como r y la recta que contiene a P y S son ⊥s, el producto escalar de dos de sus vectores directores será 0.
$P(2, 0, 0)$

$\vec{PS} = (\lambda - 2, 0, 11 - 4/3\lambda)$

$\Rightarrow \vec{PS} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (\lambda - 2, 0, 11 - 4/3\lambda)(1, 0, -4/3) = 0$
$\lambda - 2 + (11 - 4/3\lambda)(-4/3) = \lambda - 2 - \frac{44}{3} + \frac{16}{9}\lambda = 0$

$\Rightarrow (\frac{16}{9} + 1)\lambda = \frac{44}{3} + 2, \ (\frac{16+9}{9})\lambda = \frac{44+6}{3}$
$\frac{25}{9}\lambda = \frac{50}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{50 \cdot 9}{25 \cdot 3} = 6 \Rightarrow \lambda = 6$
$S = (6, 0, 11 - \frac{4 \cdot 6}{3}) = (6, 0, 3)$

b) Mediante pitágoras (Si el lado mayor "supuesta hipotenusa del triángulo rectángulo es la suma de los cuadrados de los catetos, será rectángulo.

$\vec{PQ} = (-3, 12, 4) \Rightarrow |\vec{PQ}| = \sqrt{169} = 13$
$\vec{PS} = (4, 0, 3) \Rightarrow |\vec{PS}| = \sqrt{25} = 5$
$\vec{QS} = (7, -12, -1) \Rightarrow |\vec{QS}| = \sqrt{194}$

$\Rightarrow \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{169 + 25} = \sqrt{194} = \vec{QS}$

Por tanto, concluimos con que es un triágulo rectángulo con el ángulo recto en P.