Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro k y resolverlo cuando sea posible:

$$\begin{cases} kx + 2z = 0 \\ ky - z = k \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada del sistema en función del parámetro k.

$$|C| = \begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = k^2 + k = k(k+1) \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow k = 0, -1$$

Por tanto si $k \neq 0 y -1 \Rightarrow$ r(C)=3=r(A)=nº de incógnitas y por tanto el sitema será compatible determinado, con solución única, que es (por Cramer):

$$x = \frac{-4}{k+1}; y = \frac{2}{k+1}; z = \frac{2k}{k+1}$$

Veamos ahora que ocurre si k=0.

$|C| = 0$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow r(C) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{se observa que la 1ª y 2ª filas son múltiplos, por lo tanto,}$$

para calcular el rango de A podemos suprimir cualquiera de las dos

$$\mathrm{r(A)} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto el r(C)=r(A)=2<nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) cuya solución es:

$x = 5 - 3y; z = 0 \qquad (5 - 3y, y, 0)$

Si k=-1:

En este caso el r(C)=2 pues $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Ahora $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

Ahora los rangos de las matrices C y A son distintos, por lo tanto en este caso el sistema es incompatible y no tiene solución.