Curso 2000-2001

EJERCICIOS.NET

OPCIÓN A

SELECTIVIDAD – MATEMÁTICAS II - ANDALUCÍA

Modelo 3 - Junio | Mikel Gil

Ejercicio 1. **[2'5 puntos]** Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$

Ejercicio 2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\left|x^2-1\right|$

(a) **[0'5 puntos]** Esboza la gráfica de f.

(b) **[1 punto]** Estudia la derivabilidad de f.

(c) **[1 punto]** Calcula $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Ejercicio 3. Se sabe que la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ verifica que $\det(A)=1$ y sus columnas son vectores perpendiculares dos a dos.

(a) **[1'5 puntos]** Calcula los valores de a y b.

(b) **[1 punto]** Comprueba que para dichos valores se verifica que $A^{-1}=A^t$ donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 4. Considera los planos

$$\pi_1 \equiv 2x+5=0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 3x+3y-4=0$$

(a) **[1'25 puntos]** ¿Qué ángulo determinan ambos planos?

(b) **[1'25 puntos]** Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

1°- Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\operatorname{sen} x}{x^3-x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ M3A-01

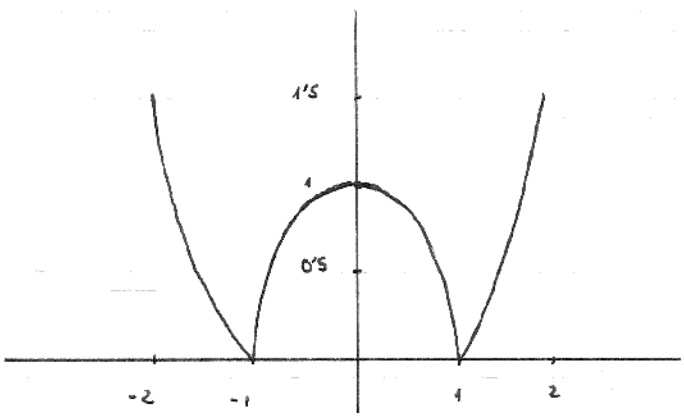
L'Hôpital: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + (e^x-1)\cos x}{3x^2-2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$. L'H...

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + e^x \cos x + (e^x-1)(-\operatorname{sen} x)}{6x-2} = \frac{2}{-2} = -1$

2° $f(x) = |x^2-1|$ a) Definimos la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & si \quad x<-1 \\ -x^2+1 & si \quad -1 \leq x < 1 \\ x^2-1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Para dibujarla tomamos como referencia a $y=x^2$ y la desplazamos



b) Derivabilidad de f: en $x=1$ y en $x=-1$

$$x=-1: \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x<-1 \\ -2x & si \quad -1<x<1 \\ 2x & si \quad x>1 \end{cases}$$

$f'(-1^-) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = -2$, $f'(-1)^+ = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$

$\Rightarrow \nexists f'(-1)$

En $x=1$, $f'(1)$: $f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $f'(1)^+ = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$

$\Rightarrow \nexists f'(1) \Rightarrow f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

c) Calcular $\int_0^2 f(x) = \int_0^1 (-x^2+1)dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx$

$= \left(-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 + \left(\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 = -\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{8}+1 = 2$

Mikel Gil

3º a) $u=(a,0,b)$, $v=(0,-1,0)$, $w=(-a,0,b)$

$\det A=1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix} \Rightarrow ab=-1/2$

$u \perp w \Rightarrow \quad 0=-a^2+b^2 \Rightarrow a^2=b^2$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{matrix} ab=-1/2 \\ a^2=b^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2b^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow a^2\cdot a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a^4=1/4 \Rightarrow a=\pm\sqrt[4]{1/4}=\pm 1/\sqrt[4]{4}$

$\Rightarrow a=1/\sqrt[4]{4}, \; b=-\sqrt[4]{4}/2$

$a=-1/\sqrt[4]{4}, \; b=\sqrt[4]{4}/2$

b) $A^{-1}=A^t \qquad A^t=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & b \end{pmatrix}. \; A^{-1}=1/|A|\cdot[\operatorname{adj} A]^t$

$=\begin{pmatrix} -b & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}$ Porque $-2ab=1$

4º $\vec{n_1}=(2,0,0)$, $\vec{n_2}=(3,3,0)$ $\quad \cos\alpha=\dfrac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|\cdot|\vec{u_2}|}=$

$=\dfrac{6}{2\sqrt{18}}=\dfrac{3}{\sqrt{18}}=\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha=45^\circ$

b) Π_3 pasa por $O(0,0,0)$ y vectores // a $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$

$\Rightarrow \Pi_3=\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 6z=0$

$\Rightarrow z=0 \qquad \Pi_3: \; z=0$