Curso 2000-2001

EJERCICIOS.NET

OPCIÓN B

SELECTIVIDAD – MATEMÁTICAS II - ANDALUCÍA

Modelo 3 - Junio | Mikel Gil

Ejercicio 1. Siendo $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x, considera la función $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ x\text{Ln}(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) [**1 punto**] Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.

(b) [**1'5 puntos**] Calcula $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Ejercicio 2. [**2'5 puntos**] Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $5x - y - 3 = 0$.

Ejercicio 3. Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} mx + y - z & = 1 \\ x - my + z & = 4 \\ x + y + mz & = m \end{array}\right\}$$

(a) [**1'5 puntos**] Discútelo según los valores de m.

(b) [**1 punto**] ¿Cuál es, según los valores de m, la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

Ejercicio 4. Sea r la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y & = 0 \\ 3x + z & = 0 \end{cases}$

(a) [**1'5 puntos**] Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 7 unidades.

(b) [**1 punto**] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$.

1º M3B-01

a) Para que f sea derivable

$$f'(x) = \begin{cases} a & si \ -1 < x \leq 1 \\ \ln(x)+1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

$f'(1^+) = f'(1^-)$

$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = a$

$a = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-1) & si \ -1 < x \leq 1 \\ x\ln(x) & si \quad x > 1 \end{cases}$

b) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (x-1)\,dx + \int_1^2 x\ln x\,dx$

$\int_0^1 (x-1)dx = \left.\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -1/2$

$\int_1^2 x\ln x\,dx$: $u = \ln x$ $du = 1/x\,dx$; $v = x^2/2$ $dv = x\,dx$

$\left.\frac{\ln x \cdot x^2}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx = \frac{\ln(2)\cdot 4}{2} - \frac{\cancel{\ln(1)}^{0} \cdot 1^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_1^2$

$= 2\ln(2) - \frac{1}{4}\left(x^2\right]_1^2 = 2\ln(2) - \frac{1}{4}(4-1) =$

$= 2\ln(2) - \frac{3}{4}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 2\ln(2) = 2\ln(2) - 5/4$

2º. $f''(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 3x + C$, $f(x) = \frac{3x^2}{2} + Cx + k$

Datos. $f(1) = 5$ y $f'(1) = 5$

$\Rightarrow 3(1) + C = 5 \Rightarrow 3 + C = 5 \Rightarrow C = 2$

$f(1) = 5 = \frac{3(1)}{2} + 2(1) + k = 5 \Rightarrow k = -3/2$

$f(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$

Mikel Gil

3º $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$. A^* (ampliada) $= \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -m & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m & m \end{array}\right)$

Si $|A| \neq 0$ $rg A = rg A^* = 3$ S.C.D.

$|A| = \dots = 0 = -m^3 - 3m = 0 \Rightarrow m(-m^2 - 3) = 0$

$m = 0, m = \pm\sqrt{-3} \nexists \mathbb{R} \Rightarrow m = 0$

Si $m = 0 \Rightarrow rg A = 2$. $rg A^* = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Posición relativa de los 3 planos: $\pi_1 : (0, 1, -1)$, $\pi_2 : (1, 0, 1)$

$\pi_3 : (1, 1, 0)$.

$n_1 \not\parallel n_2 \Rightarrow$ se cortan, $n_1 \not\parallel n_3$, se cortan

$n_2 \not\parallel n_3 \Rightarrow$ se cortan. $\not\parallel$: "no son paralelos"

4º a) Paramétricas: $z = \lambda$, $x = -1/3\,\lambda$, $y = \lambda/2$

$\Rightarrow (x, y, z) = (-\lambda/3, \lambda/2, \lambda) \Rightarrow$ Punto $(0, 0, 0)$

$\vec{v_r} = (-1/3, 1/2, 1)$

$d(O, r) = 7 \Rightarrow 7 = \sqrt{\lambda^2/9 + \lambda^2/4 + \lambda^2} \Rightarrow$

$49 = \frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 6$

$\lambda = 6$: $P_1(-2, 3, 6)$

$\lambda = -6$: $P_2(2, -3, -6)$

b) $\vec{n}$ y $\vec{v_r} = (-1/3, 1/2, 1)$ y un punto $P(1, 2, -1)$