Curso 2000-2001

EJERCICIOS.NET

OPCIÓN A

Selectividad – Matemáticas II - Andalucía

Modelo 4 - Junio | Mikel Gil

Ejercicio 1.

(a) **[1'25 puntos]** Determina el valor de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax+b & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto $(0,1)$.

(b) **[1'25 puntos]** ¿Existen constantes c y d para las cuales la gráfica de la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x\le 0 \\ cx^2+d & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ admita recta tangente en el punto $(0,1)$? (Justifica la respuesta)

Ejercicio 2. Calcula

(a) **[1'25 puntos]** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(b) **[1'25 puntos]** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-3x}$

Ejercicio 3. **[2'5 puntos]** Determina la matriz X tal que $AX-3B=0$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. **[2'5 puntos]** Halla las coordenadas del punto simétrico de $A(0,-1,1)$ con respecto a la recta

$$\frac{x-5}{2}=y=\frac{z-2}{3}$$

M4A-01

1º a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x \leq 0 \\ ax+b & si \quad x > 0 \end{cases}$

Es derivable en $x=0$ y $f(0)=1$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x \leq 0 \\ a & x > 0 \end{cases}$ $\quad f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ (ctª)

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \dots = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = b \Rightarrow b = 1$

Derivable: $f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \dots = a$ $\quad a = -1$

$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \dots = -1$

b) $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x \leq 0 \\ cx^2+d & si \quad x > 0 \end{cases}$ Del mismo modo.

$g'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si \quad x \leq 0 \\ 2cx & si \quad x > 0 \end{cases}$

Continua: $\lim_{x \to 0^-} g(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} g(x) = d \Rightarrow d = 1$

Derivable: $\lim_{x \to 0^-} g'(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} g'(x) = -1 \Rightarrow 0 = -1$ Absurdo.

No admite tangente en ese punto.

2º a) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$, L'Hôpital: $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2x} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1/2$

b) $\lim_{x \to \infty} x^{2x} \cdot e^{-3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{2x}}{e^{3x}} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{e^3}\right)^{\infty x}$, L'H

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty}$, L'H. $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{9e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$

Mikel Gil

3º $Ax-3B=0 \Rightarrow Ax=3B$

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot 3\cdot B \Rightarrow X=3A^{-1}B$

$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = 1/|A| \cdot [\text{adj} A]^t$

$a_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad a_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad a_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$a_{21} = | \quad | = -1, \quad a_{22} = -2, \quad a_{23} = -1$

$a_{31} = 3, \quad a_{32} = 5, \quad a_{33} = 3$

$\Rightarrow (\text{adj} A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = 3\cdot A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$

4º recta paramétrica: $x=5+2\lambda, \; y=\lambda, \; z=2+3\lambda$

$\Rightarrow$ Punto $(5,0,2)$ y $\vec{v_r} = (2,1,3)$

$\Rightarrow \Pi: \; 2(x-0)+1(y+1)+3(z-1)=0 \Rightarrow 2x+y+3z-2=0$

B = r intersección con Π

$2(5+2\lambda)+1(\lambda)+3(2+3\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-1$

$B(3,-1,-1)$

$\Rightarrow (3,-1,-1) = \left(\frac{0+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{1+z}{2} \right)$

$\Rightarrow x=6, \; y=-1, \; z=-3$

$A'(6,-1,-3)$